数理解析研究所講究録
196巻 1973年 36-56

Borelの恒等式について

名大 教養 藤本坦孝

§1. 序.

1897年, E. Borel は次の結果を与えた.

定理([1]). 整関数 $a_0(z), a_1(z), \cdots, a_p(z)$; $h_0(z), h_1(z), \cdots, h_p(z)$ に対し, 各 $a_i(z)$ の絶対値の $\{|z|=r\}$ 上の最大値が, すべて $e^{\mu(r)}$ より小さく, $h_i(z)-h_j(z)$ $(i \neq j)$ のそれが, すべて $\mu(r)^2$ より大きくなる様な, 正値単調増加関数 $\mu(r)$ $(0<r<+\infty)$ が存在すると仮定する. もし,

$$a_0(z)e^{h_0(z)}+a_1(z)e^{h_1(z)}+\cdots+a_p(z)e^{h_p(z)} \equiv 0$$

ならば, 必らず

$$a_0(z) \equiv a_1(z) \equiv \cdots \equiv a_p(z) \equiv 0$$

である。

ここでは, 各 $a_i(z)$ が定数の場合に限れば, この結果が, H. Cartan の得た defect relation ([3]) を使う事によって, より精密化された形で証明できる事を示し, その応用として, 有理型関数の除外値に関する Picard の定理や, 有

理型関数の一意性に関する Pólya-Nevanlinna の定理の，N 次射影空間 $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の場合への拡張を考える。

§2. H. Cartan の defect relation.

複素平面 $\mathbb{C}$ 内の $\{z;\ r_0 \leqq |z| < +\infty\}$ ($r_0 \geqq 0$) を含む領域 D 上の共通零点を持たぬ p 個の正則関数の組 $f = (f_1, \cdots, f_p)$ に対し，

$$u(z) := \max_{1 \leqq i \leqq p} \log |f_i(z)|$$

とおく。

定義 2.1. H. Cartan ([3]) に従って，各 $r\ (> r_0)$ に対し

$$T(r, f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r_0 e^{i\theta})\,d\theta$$

とおき，これを f の特性関数と呼ぶ。

D 上の有理型関数 $g(z)$ を，共通零点のない正則関数 f_1, f_2 によって $g = \dfrac{f_2}{f_1}$ とかく時，$f = (f_1, f_2)$ の特性関数は，定数項を無視すれば，R. Nevanlinna の意味の特性関数 (c.f. [10]) に等しい。有理型関数の場合と同様に，

(2.2) $f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ が超越的，即ち，或 i, j ($\neq$) に対し，$\dfrac{f_i}{f_j}$ が ∞ で真性特異点をもつ必十条件は

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{T(r, f)}{\log r} = +\infty$$

である。

定義 2.3. 集合 $\gamma_{r_0} = \{z;\ |z| = r_0\}$ 上零でない D 上の正則関数 $F(z)$ に対し，

$$N_m(r, F) := \sum_\mu \min(m_\mu, m) \log\left|\frac{r}{a_\mu}\right|$$

と定義する。ここで，m は正整数で，$\sum_\mu$ は，$\{r_0 < |z| \leqq r\}$ 内の，重複度が m_μ の $F(z)$ の零点 a_μ のすべての和を表わす。

共通零点のない正則関数の組 $\mathfrak{f} = (f_1, \cdots, f_p)$ の一次結合

$$F = a^1 f_1 + a^2 f_2 + \cdots + a^p f_p$$

に対し，γ_{r_0} 上 $F(z) \neq 0$ とする。この時，任意の m に対し，

(2.4) $\quad N_m(r, F) \leqq T(r, \mathfrak{f}) + O(1)$

が成り立つ。

定義 2.5. 上記の $\mathfrak{f}$, F に対する defect を

$$\delta_m(\mathfrak{f}, F) := 1 - \varliminf_{r \to \infty} \frac{N_m(r, F)}{T(r, \mathfrak{f})}$$

と定義する。

(2.4) より，つねに $0 \leqq \delta_m(\mathfrak{f}, F) \leqq 1$ である。

[3] において，H. Cartan は次の defect relation を得た。

定理 2.6. D 上共通零点をもたぬ正則関数の組 $\mathfrak{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ に対し，$q\ (> p)$ 個の一次結合

$$F_j = a_j^1 f_1 + a_j^2 f_2 + \cdots + a_j^p f_p \quad (1 \leqq j \leqq q)$$

を考える。ここで，行列 $((a_j^i\,;\ 1 \leqq i \leqq p,\ 1 \leqq j \leqq q))$ の任意の p 次の小行列式が零でなく，更に γ_{r_0} 上つねに Wronskian

$$W_{\mathfrak{f}}(z) := \begin{vmatrix} f_1, & f_2, & \cdots, & f_p \\ f_1', & f_2', & \cdots, & f_p' \\ & \cdots & & \\ f_1^{(p-1)}, & f_2^{(p-1)}, & \cdots, & f_p^{(p-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

且つ，$F_j(z) \not\equiv 0$ $(1 \leqq j \leqq q)$ とし，$r_0 > 0$ の場合には，f が超越的であると仮定する。この時

$$\sum_{j=1}^{q} \delta_{p-1}(f, F_j) \leqq p$$

が成り立つ．

注意．定理 2.6 で $p=2$ の場合は，R.Nevanlinna のいわゆる第II基本定理と本質的に同じものである．

§3. Borel の恒等式の精密化

$\mathbb{C}^n$ 内の領域 D 上の正則関数 $f(z)$ $(\not\equiv 0)$ に対し，一点 $a \in D$ の近くで，f を級数

$$f(u_1+a_1, \cdots, u_n+a_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(u_1, \cdots, u_n)$$

に展開する。ここで，$P_m(u)$ は，恒等的に零か，又は m 次同次多項式を表わす．

定義 3.1. f の零点 a の重複度を

$$\nu_f(a) := \min\{m ;\ P_m(u) \not\equiv 0\}$$

と定義する，ここで $f(a) \neq 0$ の時は $\nu_f(a) = 0$ とおく，

特に，$D = \mathbb{C}^n$ の場合は，次の事がいえる．

補題 3.2. 単位球面 $S^{2n-1} := \{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ 内の適当な Lebesgue 測度零の集合 E に対し，$zu^0 := (z_1u^0, \cdots, z_nu^0)$ $(z = (z_1, \cdots, z_n) \in S^{2n-1} - E,\ u^0 \neq 0)$ とおける任意の $f(z)$ の零点について，$\nu_f(zu^0)$ が，u のみの関数 $f_z^*(u) = f(z_1u, \cdots, z_nu)$ の $u = u^0$ での零点の位数に等しい．

又、$D = \{|z_i| < r_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ の場合は、

補題 3.3. $\tilde{D} := \{|z_i| < r_i,\ 2 \leq i \leq n\}$ 内の適当な Lebesgue 測度零の集合 E に対し、$a = (a_1, \tilde{a})$ $(\tilde{a} = (a_2, \cdots, a_n) \in \tilde{D} - E)$ とかける任意の $f(z)$ の零点について、$\nu_f(a)$ が、$f(z_1, \tilde{a})$ を z_1 のみの関数とみての $z_1 = a_1$ での零点の位数となる。

多変数有理型関数の真性特異点に関し、次の事が成り立つ。

補題 3.4. 領域 $D := \{0 < |z_1| < r_1,\ |z_i| < r_i,\ 2 \leq i \leq n\}$ 上の有理型関数 $\varphi(z_1, \cdots, z_n)$ に対し、$\tilde{D} = \{|z_i| < r_i,\ 2 \leq i \leq n\}$ 内の或 Lebesgue 測度正の集合 P に属する任意の $\tilde{z}$ に対する $f(z_1, \tilde{z})$ が、z_1 のみの有理型関数として意味をもち、$z_1 = 0$ が除き得る特異点であると仮定する。この時、$f(z)$ は $\{|z_i| < r_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ 全体の有理型関数に接続される。

いずれも証明を略す(c. f., [6])。尚、[8] によれば、最近、B. Shiffman が補題 3.4 と同じ結果を得た (unpublished) との事である。

以上の準備のもとに、Borel の結果を次の様に精密化する。

定理 3.5. 恒等的に零ではない n 変数整関数 $f_0, f_1, \cdots, f_p$ $(p \geq 2)$ が、適当な正整数 m_i $(0 \leq i \leq p)$ に対し、以下の条件をみたすものとする。

a) $\sum_{i=0}^{p} \frac{1}{m_i} < \frac{1}{p-1}$,

b) 各 f_i は重複度 $< m_i$ の零点をもたない。

c) $f_{i_0}, f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$ $(0 \leq i_\ell \leq p,\ k \geq 1)$ が共通零点 z_0 をもつ時,

$$\nu_\ell := \nu_{f_{i_\ell}}(z_0) - \min(\nu_{f_{i_0}}(z_0), \nu_{f_{i_1}}(z_0), \dots, \nu_{f_{i_k}}(z_0)) > 0$$

なる任意の ℓ $(0 \leq \ell \leq k)$ に対し, $\nu_\ell \geq m_{i_\ell}$ である.

d) 任意の $i, j(\neq)$ に対し $\frac{f_i}{f_j} \neq$ 定数である.

この時, $f_0, f_1, \dots, f_p$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立である.

注意 1. 各 $f_i(z)$ が或整関数 $h_i(z)$ によって $f_i(z) = e^{h_i(z)}$ とかける時, 零点をもたぬ事から, 十分大きな m_i に対し, 条件 a) ~ c) がみたされる. 従って, 定理 3.5 は, Borel の結果の $a_i(z) \equiv$ 定数の場合の精密化とみられる.

2. 定理 3.5 で, 各 f_i $(0 \leq i \leq p-1)$ が $f_i^{m_i}$ なる形をし, $f_p \equiv 1$ なる場合は, N. Toda によって研究された ([13]).

証明. 補題 3.2 によって, u のみの関数

$$(f_0)_z^*(u) := f_0(zu), \ \dots, \ (f_p)_z^*(u) := f_p(zu)$$

が, 定理 3.5 の仮定 a) ~ d) をみたす $z \in S^{2n-1}$ が取れる. 又, $(f_0)_z^*, \dots, (f_p)_z^*$ が $\mathbb{C}$ 上一次独立なら, $f_0, f_1, \dots, f_p$ も一次独立故, 定理 3.5 は, $n=1$ の場合にのみ証明すれば十分である. そこで, 定数 $c^0, c^1, \dots, c^p$ に対し,

$$c^0 f_0 + c^1 f_1 + \cdots + c^p f_p = 0$$

とする. どれかの i に対し $c^i = 0$ なる事を示せば十分である. 実際, これがいえれば, f_i $(0 \leq i \leq p)$ から任意に選んだ p 個についても条件 a) ~ d) が成り立つ事に注意すれば,

定理3.5は，pに関する数学的帰納で容易に証明される．$c^i \neq 0$ $(1 \leq i \leq p)$と仮定する．零点が，位数もこめて，丁度f_i $(1 \leq i \leq p)$の共通零点である様な整関数gをとり，$g_i = \frac{c^i f_i}{g}$ $(0 \leq i \leq p)$とおく．正則関数の組$\mathfrak{g} = (g_1, g_2, \cdots, g_p)$は共通零点なく，条件b)，c)より，$g_0 = -(g_1 + \cdots + g_p)$および$g_i$ $(1 \leq i \leq p)$が，夫々，重複度$< m_i$ $(0 \leq i \leq p)$の零点をもち得ない．更に，帰納法の仮定から，$g_1, \cdots, g_p$は一次独立，従って，Wronskian $W_{\mathfrak{g}}(z) \not\equiv 0$である．必要なら原点をずらせて，$W_{\mathfrak{g}}(0) \neq 0$，$g_i(0) \neq 0$ $(0 \leq i \leq p)$としてよい．この時，定義2.3および(2.4)から

$$\begin{aligned} N_{p-1}(r, g_i) &\leq (p-1) N_1(r, g_i) = \frac{p-1}{m_i} m_i N_1(r, g_i) \\ &\leq \frac{p-1}{m_i} N(r, g_i) \\ &\leq \frac{p-1}{m_i} (T(r, \mathfrak{g}) + O(1)) \end{aligned}$$

が成り立つ．これより，$\delta_{p-1}(\mathfrak{g}, g_i) \geq 1 - \frac{p-1}{m_i}$ $(0 \leq i \leq p)$がいえ，定理2.6を使えば，

$$\sum_{i=0}^{p} \left(1 - \frac{p-1}{m_i}\right) \leq p$$

となる．これは条件(a)に矛盾する．よって定理3.5を得る．

Borelの恒等式の次の形の精密化も成り立つ．

定理3.6．領域D $(\subset \mathbb{C}^n)$およびその既約解析的集合S $(\subsetneqq D)$に対し，$D - S$上の恒等的に零でない正則関数f_0，$f_1, \cdots, f_p$が定理3.5の条件a)〜c)をみたし，更に，

d′) 任意の $\frac{f_i}{f_j}$ ($i \neq j$) を，D全体の有理型関数として接続できない．

とする．この時，D上の有理型関数 $\alpha^0, \alpha^1, \ldots, \alpha^p$ に対し，

$$\alpha^0 f_0 + \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^p f_p \equiv 0$$

ならば，つねに

$$\alpha^0 \equiv \alpha^1 \equiv \cdots \equiv \alpha^p \equiv 0$$

である．

証明は，先ず，補題 3.3 および補題 3.4 を使って一変数の場合へ帰着させた上，定理 2.6 の $r_0 > 0$ の場合を適用して，定理 3.5 と同じ方針で示える。詳細は略す(c. f., [6])．

§4. Picard の定理の拡張．

いわゆる Picard の小定理は，" $\mathbb{C}$ から Riemann 球 $P_1(\mathbb{C})$ への正則写像の像が三点を除外すれば定数に限る" という形でのべられる．前節の結果を使って，この定理を，$P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の場合に拡張する．

領域 $D (\subset \mathbb{C}^n)$ から $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像 f は，各点の十分小さな近傍 U 上では，$P_N(\mathbb{C})$ の斉次座標を使って，U上の正則関数 $f_i(z)$ $(0 \leq i \leq N)$ によって $f(z) = f_0(z) : f_1(z) : \cdots : f_N(z)$ と表わされる．更に，ここで

$$\mathrm{codim}\,\{ f_0(z) = f_1(z) = \cdots = f_N(z) = 0 \} \geq 2$$

をみたす様にできる．以後，この様な f の表示を，U上での

admissible representation と呼ぶ事にする。$P_N(\mathbb{C})$内の超平面

$$H : a^0 w_0 + a^1 w_1 + \cdots + a^N w_N = 0$$

を考える。$f(D) \not\subset H$ なる仮定のもとに、正則関数 $F := a^0 f_0 + a^1 f_1 + \cdots + a^N f_N$ を使って、$\nu(f, H) := \nu_F$ とおく。これは、f の局所的な admissible representation の取り方に関係せずきまり、D 全体で確定した意味をもつ。

さてそこで、$P_N(\mathbb{C})$内に、$q\ (:= N+t+1 > N+1)$ 個の一般の位置にある超平面 $H_i\ (0 \leq i \leq N+t)$ を取る。各H_iが

$$H_i : w_i = 0 \qquad 0 \leq i \leq N$$

$$H_j : a_j^0 w_0 + a_j^1 w_1 + \cdots + a_j^N w_N = 0 \qquad N+1 \leq j \leq N+t$$

として与えられる様な斉次座標 $w_0 : w_1 : \cdots : w_N$ を固定する。そこで、添字の集合 $I := \{0, 1, \cdots, N\}$ の任意の分割 $J = (J_1, \cdots, J_p)$ を考える。ここで $I = \bigsqcup_{l=1}^{p} J_l$, $J_l \cap J_m = \phi$ $(l \neq m)$ 且つ $p \geq 2$ とする。又、写像 $\chi : \{1, 2, \cdots, t\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, p\}$ を任意に取り、$l \neq \chi(s)$ なるすべての l, s $(1 \leq l \leq p,\ 1 \leq s \leq t)$ に対し、$\sum_{i \in J_l} a_{N+s}^i w_i = 0$ をみたす $P_N(\mathbb{C})$ の点 $w = w_0 : w_1 : \cdots : w_N$ の全体を $E_{J,\chi}$ とおく。

定理 4.1. $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像 f が、上述の $\{H_i : 0 \leq i \leq N+t\}$ に対し、次の条件をみたすとする。

適当な正整数 $m_i\ (0 \leq i \leq N+t)$ に対し

a) 任意の $1 \leq s \leq t$ なる s に対し

$$\sum_{i=0}^{N} \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_{N+s}} < \frac{1}{N},$$

b) $f(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i$ $(0 \le i \le N+t)$ で，且つ，$\nu(f, H_i)(z) > 0$ なる z でつねに $\nu(f, H_i)(z) \ge m_i$,

c) $f(z^0) \in H_{i_0} \cap H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_k}$ $(z^0 \in \mathbb{C}^n,\ 0 \le i_\ell \le N+t,\ k \ge 1)$ なる時，任意の ℓ $(0 \le \ell \le k)$ に対し，

$$\nu_\ell := \nu(f, H_{i_\ell})(z^0) - \min_{0 \le \ell \le k} \nu(f, H_{i_\ell})(z^0)$$

が，零か，さもなければ $\ge m_{i_\ell}$，

この時，f は定数となるか，又はその像が或 $E_{J,\kappa}$ の $\le p-1$ 次元の線型部分空間に含まれる。ここで，p は分割 J における類の数を表わし，つねに $p \le \frac{t+N+1}{t+1}$ である。

証明．$\mathbb{C}^n$ 全体での f の admissible representation $f = f_0 : f_1 : \cdots : f_N$ を取り，$\frac{f_i}{f_j} \equiv$ 定数，なる i, j を同じ類 J_ℓ に入るとして $\{0, 1, \ldots, N\}$ の分割 $J = (J_1, \ldots, J_p)$ を考える。$p = 1$ となるのは f が定数の場合だから，$p \ge 2$ とする。各 J_ℓ から一つづつ代表元 N_ℓ を選び，$c_j^\ell := \sum_{i \in J_\ell} a_j^i \frac{f_i}{f_{N_\ell}}$ $(1 \le \ell \le p,\ N+1 \le j \le N+t)$ とおく。この時，

$$F_j = a_j^0 f_0 + \cdots + a_j^N f_N = c_j^1 f_{N_1} + c_j^2 f_{N_2} + \cdots + c_j^p f_{N_p}$$

なる関係式をうるが，F_{N+s} $(1 \le s \le t)$ は，どれかの f_{N_ℓ} $(=: f_{N_{\chi(s)}}$ とおく$)$ との比が定数である。もしそうでなければ，$F_{N+s}, f_{N_1}, \ldots, f_{N_p}$ に定理 3.5 を適用して矛盾に達するからである。上の式を

$$C_{N+s}^{1} f_{N_1} + \cdots + \left(C_{N+s}^{\chi(s)} - \frac{F_{N+s}}{f_{N_{\chi(s)}}}\right) f_{N_{\chi(s)}} + \cdots + C_{N+s}^{p} f_{N_p} = 0$$

とかきなおし，f_{N_ℓ} $(1 \leq \ell \leq p)$ に再び定理 3,5 を適用すれば，$C_{N+s}^{\ell} = 0$ $(\ell \neq \chi(s),\ 1 \leq \ell \leq p)$ を得る．これは，写像 $\chi: s \longmapsto \chi(s)$ に対し，$f(\mathbb{C}^n) \subset E_{J,\chi}$ となる事を意味する．更に，同じ J_ℓ 内の i, j に対し $\frac{f_i}{f_j} \equiv$ 定数 となる事に注意すれば，$f(\mathbb{C}^n)$ が $\leq p-1$ 次元部分空間に含まれる事は明らかである．又，$p \leq \frac{t+N+1}{t+1}$ は，組み合わせ論的な考察で容易に得られる（c.f., [5]）．

注意 1．定義からわかる様に，$\bigcup_{J,\chi} E_{J,\chi}$ は個々の f によらない．又，$E_{J,\chi} \not\subset \{w_i = 0\}$ $(0 \leq i \leq N)$ なる任意の $E_{J,\chi}$ に対し $\dim E_{J,\chi} \leq N - (p-1)t \leq N - t$ が容易に示される．

2．$f(\mathbb{C}^n) \cap H_i = \phi$ $(0 \leq i \leq N+t)$ なる時，十分大きな m_i に対し，条件 a) ～ c) がみたされる，この特別の場合は，[5] および [7] で与えられた．又，特に $t = N = 1$ とした場合が Picard の小定理である．

3．定理 4.1 で $N = n = t = 1$，従って $q = 3$ の場合は，条件 a) の不等式は或意味で best possible である．例えば，相異なる実数 α, β, γ に対し

$$z(w) = \int_0^w (t-\alpha)^{\frac{1}{m_1}-1} (t-\beta)^{\frac{1}{m_2}-1} (t-\gamma)^{\frac{1}{m_3}-1} dt$$

の逆関数 $w = w(z)$ は，$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = 1$ の時，一価となり，$w(z) - \alpha$，$w(z) - \beta$，$w(z) - \gamma$ の零点の重複度

は，夫々，m_1，m_2，m_3 の倍数ばかりである (c.f., [10], p. 278).

系 4.2. $d > N(N+2)$ に対し，$P_{N+1}(\mathbb{C})$ 内の超曲面

$$V^d : \quad w_0^d + w_1^d + \cdots + w_{N+1}^d = 0$$

への，$\mathbb{C}^n$ からの任意の正則写像 f は，添字 $0, 1, \cdots, N$ を適当にいれかえ

$$f = a_0 f_1 : a_1 f_1 : \cdots : a_{N_1} f_1 : a_{N_1+1} f_2 : \cdots : a_{N_2} f_2 : \cdots\cdots : a_{N_p} f_p$$

とかかれる．ここで，$0 < N_1 < N_2 < \cdots < N_p := N+1$ $(p \geqq 1)$，a_i は $\sum_{i=N_{\ell-1}+1}^{i=N_\ell} a_i^d = 0$，$(a_0, a_1, \cdots, a_{N+1}) \neq (0, 0, \cdots, 0)$ なる定数，f_i は $\mathbb{C}^n$ 上の正則関数である．

証明．整関数 f_i によって $f = f_0 : f_1 : \cdots : f_{N+1}$ と表示する．ここで，$f_i \not\equiv 0$ $(0 \leqq i \leqq N+1)$ としてよい．この時，$P_N(\mathbb{C})$ への写像 $g = f_0^d : f_1^d : \cdots : f_N^d$，および，$P_N(\mathbb{C})$ 内の超平面

$$H_i : \quad w_i = 0 \qquad 0 \leqq i \leqq N$$

$$H_{N+1} : \quad w_0 + w_1 + \cdots + w_N = 0$$

に対し，$m_0 = m_1 = \cdots = m_{N+1} = d$ として，定理 4.1 の条件 a) ～ c) がみたされる．系 4.2 はこれより明らかである．

定理 3.6 を使えば，定理 4.1 の類比として次の事がいえる．

定理 4.3. f を，領域 D から既約解析的集合 $S(\subsetneqq D)$ を除いた所からの $P_N(\mathbb{C})$ への正則写像とし，一般の位置にある超平面 $\{H_i : 0 \leqq i \leqq N+k\}$ に対し，定理 4.1 の条件 a) ～ c) の類比が成り立つとする．この時，f は，D から $P_N(\mathbb{C})$ への有

理型写像に拡張されるか，又は，$f(D-S)$ が或 $E_{J,\tau}$ に含まれる．

証明は略す．

§5. $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の一意性．

Borel の恒等式の，今一つの応用として，$P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像の一意性定理を与える．

f，g を $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への有理型写像，H_i（$0 \leq i \leq N+k$）を $q := N+k+1$ 個の一般の位置にある超平面とする．$f(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i$，$g(\mathbb{C}^n) \not\subset H_i$（$0 \leq i \leq N+k$）とし，更に，$\nu(f, H_i) = \nu(g, H_i)$ が成り立つものとする．この仮定のもとに f と g の間の関係を考察する．

斉次座標 $w_0 : w_1 : \cdots : w_N$ を固定し，各 H_i が

$$H_i \ : \ a_i^0 w_0 + a_i^1 w_1 + \cdots + a_i^N w_N = 0$$

で与えられるとし，f，g の admissible representation $f = f_0 : f_1 : \cdots : f_N$，$g = g_0 : g_1 : \cdots : g_N$ に対し，正則関数

$$F_i^f = a_i^0 f_0 + a_i^1 f_1 + \cdots + a_i^N f_N$$
$$F_i^g = a_i^0 g_0 + a_i^1 g_1 + \cdots + a_i^N g_N .$$

を考える．仮定により，$h_i := \dfrac{F_i^g}{F_i^f}$ は到る所零でない整関数である．ここで，連比 $h_0 : h_1 : \cdots : h_{N+k}$ は，斉次座標，admissible representation 等の取り方によらず一定である．

今，h_i の中から，任意に $2N+2$ 個を選び，それを改め

て, $h_0, h_1, \cdots, h_{2N+1}$ とする.

補題 5.1. 上述の h_i $(0\leqq i\leqq 2N+1)$ の間に

$$\sum_{0\leqq i_0<i_1<\cdots<i_N\leqq 2N+1} A_{i_0 i_1\cdots i_N}\, h_{i_0}h_{i_1}\cdots h_{i_N}\equiv 0$$

なる関係式が成り立つ。ここで, $A_{i_0 i_1\cdots i_N}$ は H_i のみによってきまる零でない定数である.

証明. 斉次座標を取り換えて, 各 H_i $(0\leqq i\leqq N)$ が $H_i=\{w_i=0\}$, 即ち, $a_j^i=\delta_j^i$ $(0\leqq i, j\leqq N)$ としてよい。この時, $f_i=F_i^f$, $g_i=F_i^g$ $(0\leqq i\leqq N)$ だから, $h_iF_i^f=F_i^g$ $(0\leqq i\leqq 2N+1)$ から,

$$a_j^0(h_j-h_0)f_0+a_j^1(h_j-h_1)f_1+\cdots+a_j^N(h_j-h_N)f_N=0 \quad (N+1\leqq j\leqq 2N+1)$$

が成り立つ。これから, $f_0, f_1, \cdots, f_N$ を消去すると

$$\Phi:=\begin{vmatrix} a_{N+1}^0(h_{N+1}-h_0), & a_{N+1}^1(h_{N+1}-h_1), & \cdots, & a_{N+1}^N(h_{N+1}-h_N) \\ a_{N+2}^0(h_{N+2}-h_0), & a_{N+2}^1(h_{N+2}-h_1), & \cdots, & a_{N+2}^N(h_{N+2}-h_N) \\ & \cdots & & \\ a_{2N+1}^0(h_{2N+1}-h_0), & a_{2N+1}^1(h_{2N+1}-h_1), & \cdots; & a_{2N+1}^N(h_{2N+1}-h_N) \end{vmatrix}\equiv 0$$

が得られる. これを $h_0, h_1, \cdots, h_{2N+1}$ の多項式として展開して, その係数をみる. 行列 $((a_j^i))_{\substack{0\leqq i\leqq N\\ N+1\leqq j\leqq 2N+1}}$ の任意の小行列式が零でない事に注意すれば, 補題 5.1 にいう形の関係式が容易に得られる.

補題 5.1 で, 各 $h_{i_0}h_{i_1}\cdots h_{i_N}$ が零点をもたぬ整関数である事から, 定理 3.5 とそれへの注意 1 を適用すれば, 任意の $i_0, i_1, \cdots, i_N$ $(0\leqq i_0<\cdots<i_N\leqq 2N+1)$ に対し, $\dfrac{h_{i_0}h_{i_1}\cdots h_{i_N}}{h_{j_0}h_{j_1}\cdots h_{j_N}}\equiv$定数

となる様な $j_0, j_1, \dots, j_N$ $(0 \le j_0 < \cdots < j_N \le 2N+1$, $\{i_0, \dots, i_N\} \ne \{j_0, \dots, j_N\})$ が取れる．以下の議論で次の補題が基本的である．

補題 5.2. g 個の恒等的には零ではない整関数 h_i $(0 \le i \le L := g-1)$ を考える．ここから勝手な M 個を選ぶ時，その中の任意の相異なる $N+1$ 個 $h_{i_0}, h_{i_1}, \dots, h_{i_N}$ に対し，これとは組合わせとして異なる $h_{j_0}, \dots, h_{j_N}$ を選んだ M 個の中から取って

$$\frac{h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N}}{h_{j_0} h_{j_1} \cdots h_{j_N}} \equiv \text{定数}$$

となる様にできると仮定する．ここで $g \ge M > N+1$ $(N \ge 0)$ とし，$k := g - M$ とおく。この時，与えられた g 個の h_i の内の適当な $k+2$ 個について，互いの比が定数となる．

証明．N と g の二重帰納法による．先ず，$N=0$ の時をみる．任意の g 個の h_i に対し，その中の一つ，例えば h_0，との比が定数となるものが h_0 も含めて $\le k+1$ 個とすると，g 個から適当な k 個を除き，残り M 個の中に h_0 は含むが，h_0 自身の他は，h_0 との比が定数となるものは含まない様にできる．これに仮定を適用すれば矛盾に逢着する．よってこの場合は正しい。

次に，任意の N に対し $g = N+2$ の時をみる．この時，$k=0$ である．$N+2$ 個の元から，$N+1$ 個の元からなる相異なる二組の組み合わせをとれば，夫々の中の一つづつを除いて他が等しくなる事から，この場合も補題 5.2 は正しい．

そこで、$\leqq N-1$ なるNについては、任意のqに対し、又、Nについては、$\leqq q-1$ なる任意のqに対し補題5.2は正しいと仮定して結論を導びく。この~~為~~、各h_i $(0\leqq i\leqq L)$が定数d_i、整数r_i (>0)およびs_{ij}によって

$$(*)\qquad h_i^{r_i} = d_i\, g_1^{s_{i1}} g_2^{s_{i2}}\cdots g_k^{s_{ik}}$$

の形に書ける様な整関数 $g_1, g_2, \dots, g_k$ を考えて、その中で個数kが最小となる様な組を取る。ここで$h_0, h_1, \dots, h_L$自身上のg_jの性質をもつ故、$k\leqq q$である。この様な$g_1,\dots,g_k$を以下でminimal generatorと呼ぶ事にする。この時、整数$s_1, s_2, \dots, s_k$に対し、$g_1^{s_1}g_2^{s_2}\cdots g_k^{s_k}\equiv$定数$(=:c)$ならば、必らず$s_1=s_2=\cdots=s_k=0$である。実際、例えば、$s_1\neq 0$とすると、$g_1^{s_1}=c\, g_2^{-s_2}\cdots g_k^{-s_k}$と書け、$r_i$, d_i, s_{i1}等をとりかえて、各h_iが$g_2,\dots,g_k$のみで(*)の形に書ける事になり、kの選び方に反するからである。又、(*)で$r_0=r_1=\cdots=r_L=1$としてよい。なぜなら、明らかに、r_iをすべて、その最小公倍数に置きかえてよいし、更にh_iの代りに$h_i'=h_i^r$を考えれば、これに対しても$g_1,\dots,g_k$はminimal generatorであり、$h_0', h_1', \dots, h_L'$に対して結論がいえれば、$h_0, h_1, \dots, h_L$にもいえるからである。

補題5.2をみるには、或j_0に対し$s_{ij_0}\neq s_{i'j_0}$ $(i\neq i')$なるi, i'が存在するとしてよい。そうでなければ、すべてのi,

j に対し, $\frac{h_i}{h_j}=$ 定数 となるからである(ここで, $g \geqq k+2$ がつねに成り立つ事に注意). 以後 $S_i := S_{ij_0}$ $(0 \leqq i \leqq L)$ と略記する. ここで添字 $0, 1, \cdots, L$ をつけかえ, 又, S_N と等しいものに注目して

$$S_0 \leqq S_1 \leqq \cdots \leqq S_{L_1-1} < S_{L_1} = \cdots = S_N = \cdots = S_{L_1+L_2} < S_{L_1+L_2+1} \leqq \cdots \leqq S_L$$

とする. 仮定から, $L_1 > 0$ か, 又は $L_1 + L_2 < L$ である. この時

(5.3) $i_0, i_1, \cdots, i_N (i_0 < \cdots < i_N)$ を $i_0 = 0, i_1 = 1, \cdots, i_{L_1-1} = L_1 - 1$ とし, 残りを $L_1, L_1+1, \cdots, L_1+L_2$ から任意に選んで,

$$\frac{h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N}}{h_{j_0} h_{j_1} \cdots h_{j_N}} = \text{定数}$$

となる $j_0, j_1, \cdots, j_N$ $(0 \leqq j_0 < \cdots < j_N \leqq L)$ を取れば, 必らず, $j_0 = 0, j_1 = 1, \cdots, j_{L_1-1} = L_1 - 1$ 且つ $L_1 \leqq j_\ell \leqq L_1 + L_2 (L_1 \leqq \ell \leqq N)$ である.

実際, 上の式の分子分母を, $g_1, g_2, \cdots, g_K$ で表わし, g_{j_0} の指数と比較すれば, 先にみた様に等しいはずである; 故に

$$S_{i_0} + S_{i_1} + \cdots + S_{i_N} = S_{j_0} + S_{j_1} + \cdots + S_{j_N}$$

即ち,

$$(S_{j_0} - S_0) + \cdots + (S_{j_{L_1-1}} - S_{L_1-1}) + (S_{j_{L_1}} - S_{i_{L_1}}) + \cdots + (S_{j_N} - S_{i_N}) = 0$$

となる. 添字のきめ方から, 各項は $\geqq 0$, 従って $= 0$ となる. $S_{j_0} = S_0, \cdots, S_{j_N} = S_{i_N}$ から (5.3) の結論を得る.

これより, $L_2 - k > N - L_1$ となる. なぜなら, $L_1 + L_2 \leqq N + k$ とすると, h_i $(0 \leqq i \leqq L)$ から $h_0, h_1, \cdots, h_N$ を残し, $h_{N+1}, \cdots, h_{L_1+L_2}$ を含む k 個を除いての残りの M 個に,

補題5.2を適用して、$\frac{h_0 h_1 \cdots h_N}{h_{i_0} h_{i_1} \cdots h_{i_N}}$ = 定数 となる $i_0, i_1, \ldots,$ i_N ($0 \leqq i_0 < \cdots < i_N \leqq L$) を取ろうとしても、$i_0 = 0,\ i_1 = 1,\ \ldots,\ i_N = N$ となってしまうからである。又、(5.3) を使えば、$h_{L_1}, \ldots, h_{L_1+L_2}$ から任意の k 個を選んで除いておき、残りの L_2+1-k 個から $i_{L_1}, \ldots, i_N$ を勝手に取り $h_0 h_1 \cdots h_{L_1-1} h_{i_{L_1}} \cdots h_{i_N}$ との比が定数になる様な h_i の $N+1$ 個の積を考える事によって、$N' = N - L_1$, $q' = L_2 + 1$, $M' = q' - k$ として、補題5.2の仮定がみたされる事がわかる。$L_1 > 0$ ならば $N' < N$ だし、$L_1 = 0$ ならば $q' = L_1 + L_2 + 1 < L + 1 = q$ だから、帰納法の仮定が適用される。従って、$h_{L_1}, h_{L_1+1}, \ldots, h_{L_1+L_2}$ の中の適当な $k+2$ 個に対し互いの比が定数となる。よって補題5.2は証明された。

定理5.4. f, g を、$\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への二つの有理型写像とする。一般の位置にある $3N+1$ 個の超平面 H_i ($0 \leqq i \leqq 3N$) に対し、$\nu(f, H_i) = \nu(g, H_i)$ ならば、$P_N(\mathbb{C})$ の適当な一次変換 L に対し $L \circ f = g$ となる。

証明. 本節初めの様な整関数 $h_0, h_1, \ldots, h_{3N}$ を考えれば、補題5.1の後の議論により、$q = 3N+1$, $M = 2N+2$ として補題5.2の仮定が成り立つ。従って、h_i の中の適当な $k+2$ $(= 3N+1-(2N+2)+2 = N+1)$ 個について、互いの比が定数となる。連比 $h_0 : h_1 : \cdots : h_{3N+1}$ のみが問題故、h_i の $N+1$ 個が定数と考えてよい。よって、適当な座標を使って

の f, g の admissible representation $f=f_0:f_1:\cdots:f_N$ および $g=g_0:g_1:\cdots:g_N$ に対し，定数 x_i によって $g_i=x_if_i$ $(0\leqq i\leqq N)$ とかける．この時，

$$L:\quad w_i'=x_i w_i \qquad (0\leqq i\leqq N)$$

なる一次変換を考えれば，$Lf=g$ である．

定理 5.5. f, g を $\mathbb{C}^n$ から $P_N(\mathbb{C})$ への非退化な，即ち，像がいかなる超平面にも含まれない様な有理型写像とする．もし，一般の位置にある $3N+2$ 個の超平面 H_i $(0\leqq i\leqq 3N+1)$ に対し，$\nu(f,H_i)=\nu(g,H_i)$ ならば $f=g$ である．

注意．$n=N=1$ の場合，定理 5.4 および定理 5.5 は，finite genus の整関数に対し，G. Pólya によって [11] で初めて示された。後に R. Nevanlinna が，一般の整関数の場合に証明した。この場合，定理 5.5 では，重複度は考えず，逆像が一致するという仮定のみでよい。N が一般でも，十分大きな d に対し，$\nu(f,H_i)-\nu(g,H_i)$ が，すべて d の倍数 という仮定で同様の議論ができるが，ここでは，これには立ち入らない。

証明．定理 5.4 の証明と同様の議論をやり，今度は $N+2$ 個の h_i を定数と考えてよい．定数 x_i による $g_i=x_if_i$ $(0\leqq i\leqq N)$ なる関係式の他に，新しい定数 x_{j_0} を取って

$$a_{j_0}^0 g_0+a_{j_0}^1 g_1+\cdots+a_{j_0}^N g_N=x_{j_0}(a_{j_0}^0 f_0+\cdots+a_{j_0}^N f_N)$$

なる関係式を得る。これは，$f_0, f_1, \ldots, f_N$ の定数係数の一次式に帰されるが，f が非退化の仮定から係数はすべて零，従って $x_0 = x_1 = \cdots = x_N = x_{j_0}$ を得る。これは $f = g$ を意味する。よって定理5.5は証明された。

参考文献

[1] E. Borel, Sur les zéros des fonctions entières, Acta math., 20 (1897), 357-396.

[2] H. Cartan, Sur les systèmes de fonctions holomorphes a variétés linéaires lacunaires et leurs applications, Ann. de ENS., 45 (1928), 255-346.

[3] H. Cartan, Sur les zéros des combinaisons linéaires de p fonctions holomorphes données, Math., 7 (1933), 5-31.

[4] H. Fujimoto, Riemann domains with boundary of capacity zero, Nagoya Math. J., 44 (1971), 1-15.

[5] H. Fujimoto, Extensions of the big Picard's theorem, Tôhoku Math. J., 24 (1972), 415-422.

[6] H. Fujimoto, Meromorphic maps into the complex projective space, to appear.

[7] M. L. Green, Holomorphic maps into the complex projective space omitting hyperplanes, Trans. A.M.S., 169 (1972), 89-103.

[8] M.L. Green, Some Picard theorems for holomorphic maps to algebraic varieties, thesis, Princeton, 1972.

[9] R. Nevanlinna, Einige Eindeutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen, Acta Math., 48 (1926), 367-391.

[10] R. Nevanlinna, Analytic functions, Springer, Berlin, 1970.

[11] G. Pólya, Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen, Math. Tidsscrift B, Kobenhavn 1921, 16-21.

[12] E. M. Schmid, Some theorems on value distributions of meromorphic functions, Math. Z., 120 (1971), 61-92.

[13] N. Toda, On the functional equation $\sum_{i=0}^{p} a_i f^{n_i} = 1$, Tôhoku Math. J., 23 (1971), 289-299.